ЛОГАРИФМ В ОЦЕНКЕ L_∞ -СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЛИНЕЙНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ НЕОБХОДИМ

Андреев В.Б.

МГУ им. М.В.Ломоносова

Рассмотрим однородную задачу Дирихле для уравнения Пуассона в плоской ограниченной полигональной области Ω :

$$-\Delta u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \qquad u|_{\partial\Omega}=0. \tag{1}$$

Пусть $T^h=\{e\}$ - обычная триангуляция $\bar\Omega = \cup\{e\subset T^h\}$. Введем соответствующее T^h конечномерное пространство кусочно-линейных непрерывных функций

$$S_0^h=\{v^h(x,y)\in C(\Omega) \mid \ v^h|_e\in P_1(e),\ e\subset T^h,\ v^h|_{\partial\Omega}=0\},$$

где $P_1(e)$ - сужение на e пространства линейных многочленов. Приближенное решение задачи (I) определим из условий

$$u^h(x,y)\in S_0^h:\ \int_\Omega \nabla u^h\cdot\nabla v^h\,dx\,dy=\int_\Omega f v^h\,dx\,dy,\ \forall v^h\in S_0^h, \tag{2}$$

где ∇ - оператор градиента. Хорошо известно [I], что

$$\|u-u^h\|_{L_2}+h\|\nabla(u-u^h)\|_{L_2}\le ch^2\|u\|_{W_2^2}, \tag{3}$$

где W_p^ℓ - пространства Соболева. Наряду с (3) имеет место [2] и такая оценка

$$\|u-u^h\|_{L_\infty}+h\ln\frac{1}{h}\|\nabla(u-u^h)\|_{L_\infty}\le ch^2\ln\frac{1}{h}\|u\|_{W_\infty^2}, \tag{4}$$

которая и является предметом нашего обсуждения.

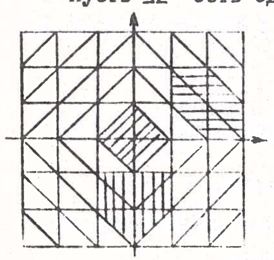
Вопрос стоит так: является ли $\ln 1/h$ в (4) необходимым или его появление связано с "недожатостью" оценки?

Укажем основные этапы в исследовании этого вопроса. В [3] было рассмотрено обыкновенное дифференциальное уравнение, представляющее собой уравнение Пуассона в осесимметричном случае с $f(x,y) \equiv const$, из (2) найдено в явном виде приближенное решение, отвечающее равномерному разбиению отрезка, и установлена необходимость логарифмического множителя в оценке типа (4). Этот пример можно было бы считать закрытием вопроса, если бы не то обстоятельство, что рассмотренное уравнение содержало особенность при $r=0$. Результаты [4] заставили на поставленный вопрос взглянуть по-новому. Был приведен пример, показывающий, что если искомое решение $u \in W^2_\infty$ и не является более гладкой функцией, то оценка (4) неулучшаема, т.е. логарифмический множитель существенен.

Однако полностью вопрос о логарифмическом множителе в (4 работой [4] снят не был. Просто его формулировка изменилась на следующую: нельзя ли в (4) убрать $\ln 1/h$ за счет усиления рядом стоящей нормы $u(x,y)$?

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы привести пример триангуляции, на которой оценка $\|u-u^h\|_{L_\infty}=O(h^2\ln 1/h)$ является неулучшаемой при любой гладкости $u(x,y)$.

Пусть Ω есть единичный квадрат с центром в начале координат, триангулированный согласно приведенному рисунку, а $\varphi_i(x,y) \in S^h_0$ – элементы базиса в S^h_0, т.е. такие кусочнолинейные непрерывные функции, которые отличны от нуля лишь в одном узле с номером i (и принимающие в этом узле значение I).



Ясно, что все φ_i, кроме одной, (пусть ее номер есть i_0) геометрически представляют собой боковые поверхности шестигранных

пирамид, основаниями которых являются шестигранники типа заштрихованных на рисунке вертикальной или горизонтальной штриховкой, а φ_{i_0} представляется четырехгранной пирамидой с основанием, заштрихованным на рисунке косой штриховкой. Представляя теперь приближенное решение в виде $u^h(x,y)=\sum u_j\varphi_j(x,y)$ и полагая в (2) $v^h=\varphi_i$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных u_j, которые являются значениями приближенного решения в узлах. Легко видеть, (см., напр., [5]), что каждое из полученных уравнений содержит не более пяти неизвестных и по внешнему виду напоминает классическую пятиточечную разностную схему для уравнения Пуассона. Если положить $f(x,y)\equiv 1$, а в граничных узлах задать однородные граничные условия Дирихле, то уравнения при $i\neq i_0$ будут в точности совпадать с указанной схемой. В целом будем иметь (h – шаг сетки)

$$-h^2\Lambda u_i=h^2,\quad i\neq i_0,\quad -h^2\Lambda u_{i_0}=2h^2/3,\quad \Lambda v=v_{\bar{x}x}+v_{\bar{y}y}.$$

(В силу (2), правые части этих уравнений суть объемы пирамид φ_i)

Пусть $u_i=\mathring{u}_i-h^2/3\,G_i$, где $-\Lambda\mathring{u}_i=1$. Тогда G_i удовлетворяет уравнениям $-\Lambda G_i=\delta(x_i,y_i)$, где $\delta(x_i,y_i)$ - сеточный аналог дельта-функции Дирака. Очевидно, что погрешность аппроксимации уравнений для $\mathring{u}_i$ есть $O(h^2)$ и, в силу принципа максимума, $|u_i-u(x_i,y_i)|=O(h^2)$. Осталось оценить G_i. Но это ведь функция Грина оператора Λ с источником в начале координат, для которой в [6] получена оценка $|G^h_i-G(x_i,y_i)|\le ch^2/\varrho_i^{-2}$, где $G(x,y)$- функция Грина оператора Лапласа с тем же источником, а $\varrho_i^2=x_i^2+y_i^2$. Тем самым, при $i\neq i_0$ $G^h(x_i,y_i)\geqslant c_1\ln 1/\varrho_i+c_2$, откуда и следует утверждение о неулучшаемости (4) при указанной триангуляции.

Когда данная работа была закончена, автору стала известна работа [7] , в которой среди других интересных результатов содержится и приведенный здесь пример.

Литература

I. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, I980.

2. Scott R. Optimal L^{∞}- estimates for finite element method on irregular mesches// Math.Comput. 1976.V.30,N136.pp.681-697.

3. Jespersen D. Ritz-Galerkin methods for singular baundary value problems// SIAMJ Numer.Anal.1978.V.15,N14.pp.813-834.

4. Haverkamp R. Eine Aussage zur L_{∞}-Stabilitöt und zur gerauen Konvergenzordnung der H_0^1-Projektionen// Numer. Math. 1984. B.44. N3. S.393-405.

5. Андреев В.Б., Руховец Л.А. Проекционные методы. М.: Знание, I986.

6. Lassonen P. On the solution of Poisson's difference equation// J. ACM. 1958. V.5. pp. 370-382.

7. Blum H., Liu Q., Rannacher R. A asymptotic error expansion and Richardson extrapolation for linear finite elements// Numer. Math. 1986. B.49. N1. S. 11-37.

56

ТБИЛИССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. И. А. ДЖАВАХИШВИЛИ

ДОКЛАДЫ

РАСШИРЕННЫХ ЗАСЕДАНИЙ СЕМИНАРА ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. И. Н. ВЕКУА

ТОМ 4, № 3

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

ТБИЛИСИ 1989