ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1998, том 38, № 4, с. 596–599

УДК 519.632

ДВУМЕРНОЕ НЕРАВЕНСТВО СОБОЛЕВА В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТКИ[1)]

© 1998 г. Н. В. Коптева

(119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВМК)

Поступила в редакцию 26.11.96 г.
Переработанный вариант 16.06.97 г.

Для кусочно-линейных непрерывных функций, заданных на триангуляции T_h области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей, установлено, что их нормы в $C(\overline{\Omega})$ ограничены нормами в $W_2^1(\Omega)$, умноженными на $c|\ln h|^{1/2}$, где h – наименьший диаметр треугольников $\tau \in T_h$, а $c = c(\Omega)$ – некоторая постоянная. Квазиравномерность триангуляции T_h не предполагается.

Известно [1], что если $\Omega = (a, b)$, то $W_2^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ и для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} \le c\|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{1}$$

где $c = c(\Omega)$ – постоянная, не зависящая от v. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то вложение (1) не имеет места. Однако если в $\overline{\Omega}$ ввести триангуляцию

$$T_h: \overline{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau$$

и предположить, что она квазиравномерна, т.е. диаметры всех треугольников τ не превосходят h, а их площади не меньше ch^2, где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от h, то для заданных на этой триангуляции кусочно-линейных непрерывных функций неравенство (1) справедливо с постоянной $c = c(h) = \tilde{c}\,|\ln h|^{1/2}$ (см. [2]–[4]):

$$\|\chi\|_{C(\overline{\Omega})} \le \tilde{c}\sqrt{|\ln h|}\,\|\chi\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{2}$$

Цель настоящей работы – установить неравенство, аналогичное неравенству (2), для триангуляций, не являющихся, вообще говоря, квазиравномерными, элементы которых могут быть сколь угодно “сплющенными”.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, углы которой отличны от 0 и 2π, T_h – ее триангуляции, т.е. $\overline{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau$, и

$$h = \min_{\tau \in T_h} \operatorname{diam} \tau. \tag{3}$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть χ – заданная в области Ω непрерывная функция, линейная на каждом треугольнике τ из T_h. Тогда*

$$\|\chi\|_{C(\overline{\Omega})} \le c\sqrt{|\ln h| + 1}\,\|\chi\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где h – параметр триангуляции T_h, определяемый соотношением (3), $c = c(\Omega)$ – *постоянная, не зависящая от χ и T_h.*

Так как для функций из $W_2^1(\Omega)$, равных нулю на части границы области Ω ненулевой длины,

---

1) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01421а).

полунорма $|v|_{W_2^1(\Omega)} \equiv \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$ эквивалентна норме $\|v\|_{W_2^1(\Omega)}$ (см. [5]), то из теоремы вытекает

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда если $\chi = 0$ на $S \subset \partial\Omega$ – части границы ненулевой длины, то

$$\|\chi\|_{C(\bar{\Omega})} \le c\sqrt{|\ln h| + 1}\|\nabla\chi\|_{L_2(\Omega)},$$

где $c = c(\Omega, S)$ – постоянная, не зависящая от χ.

Замечание 1. Если для сеточных функций, заданных в вершинах треугольников τ_i, определить сеточные аналоги норм W_2^1 и C (см. [3], [6], [7]), то для сеточных функций очевидно имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 1 есть следствие более общей теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, углы которой отличны от 0 и 2π, а функция $\chi \in W_2^1(\Omega)$ такова, что ее сужение на треугольник $\tau \subset \bar{\Omega}$ есть линейная функция. Тогда*

$$\|\chi\|_{C(\tau)} \le c_1\left|\ln\frac{c_2}{\operatorname{diam}\tau}\right|^{1/2}\|\chi\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где $c_1 = c_1(\Omega)$, $c_2 = c_2(\Omega)$ – постоянные, не зависящие от χ и τ.

Действительно, при выполнении условий теоремы 1 в силу теоремы 2 имеем

$$\|\chi\|_{C(\bar{\Omega})} \le c_1\max_{\tau\in T}\left|\ln\frac{c_2}{\operatorname{diam}\tau}\right|^{1/2}\|\chi\|_{W_2^1(\Omega)} = c_1\left|\ln\frac{c_2}{h}\right|^{1/2}\|\chi\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы 1 с постоянной $c = c_1\max\{1, |\ln c_2|^{1/2}\}$.

Для доказательства теоремы 2 будет полезна

Лемма. *Если χ – линейная функция, заданная на треугольнике τ, то*

$$\|\chi\|_{C(\tau)} \le c_3(\operatorname{mes}\tau)^{-1/2}\|\chi\|_{L_2(\tau)},$$

где $c_3 = 1/3$.

Доказательство. Обозначая через a, b, c значения функции χ в вершинах треугольника τ и учитывая линейность функции χ, имеем $\|\chi\|_{C(\tau)} = \max\{|a|, |b|, |c|\}$. Тогда из соотношений

$$\|\chi\|^2_{L_2(\tau)} = \frac{\operatorname{mes}\tau}{6}(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc) = \frac{\operatorname{mes}\tau}{6}\left[(a+b/2+c/2)^2+\frac{3}{4}(b+c/3)^2+\frac{2}{3}c^2\right] \ge$$

$$\ge \frac{\operatorname{mes}\tau}{9}\max\{a^2, b^2, c^2\}$$

получаем утверждение леммы.

Доказательства теоремы 2. Пусть B – открытый круг радиуса $R < \operatorname{diam}\Omega$, такой, что $\bar{\Omega} \subset B$. Известно [1], [3], что $\chi \in W_2^1(\Omega)$ можно продолжить на B с сохранением нормы, т.е.

$$\|\chi\|_{W_2^1(B)} \le c_4\|\chi\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{4}$$

где $c_4 = c_4(\Omega, B)$ – постоянная, не зависящая от χ, так что $\chi|_{\partial B} = 0$.

Так как функция χ линейна на τ, то, в силу леммы,

$$\|\chi\|_{C(\tau)} \le c_3(\operatorname{mes}\tau)^{-1/2}\|\chi\|_{L_2(\tau)}. \tag{5}$$

Легко видеть, что

$$\|\chi\|_{L_2(\tau)} = (\chi, \phi), \tag{6}$$

где

$$(u, v) \equiv \int_B u(M)v(M)dM$$

есть скалярное произведение в $L_2(B)$,

$$\phi(M) = \begin{cases} \chi/\|\chi\|_{L_2(\tau)}, & M \in \tau, \\ 0, & M \notin \tau, \end{cases} \tag{7}$$

есть функция из $L_2(B)$, причем

$$\|\phi\|_{L_2(B)} = 1. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение функцию $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, которая является обобщенным решением задачи

$$-\Delta v(M) = \phi(M), \quad M \in B, \quad v(M) = 0, \quad M \in \partial B, \tag{9}$$

т.е.

$$v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B): (\nabla v, \nabla \varphi) = (\phi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B). \tag{10}$$

Тогда, с учетом (6),

$$\|\chi\|_{L_2(\tau)} = (\nabla v, \nabla \chi) \le \|\nabla v\|_{L_2(B)} \|\chi\|_{W_2^1(B)}$$

и, в силу (4),

$$\|\chi\|_{L_2(\tau)} \le c_4 \|\nabla v\|_{L_2(B)} \|\chi\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Далее, замечая, что, в силу (10) и (7), (8),

$$\|\nabla v\|_{L_2(B)} = \sqrt{(v, \phi)} \le \sqrt{\|v\|_{L_2(\tau)}},$$

приходим к соотношению

$$\|\chi\|_{L_2(\tau)} \le c_4 \sqrt{\|v\|_{L_2(\tau)}} \|\chi\|_{W_2^1(\Omega)},$$

из которого с учетом (5) получаем

$$\|\chi\|_{C(\tau)} \le c_3 c_4 (\operatorname{mes} \tau)^{-1/2} \sqrt{\|v\|_{L_2(\tau)}} \|\chi\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{11}$$

Чтобы оценить $\sqrt{\|v\|_{L_2(\tau)}}$, воспользуемся представлением функции $v(M)$ (см. [8, с. 326]):

$$v(M) = (G(M, P), \phi(P)),$$

через $G(M, P)$ обозначена функция Грина задачи (9):

$$G(M, P) = G(r, \psi; \rho, \theta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{R^2 - 2r\rho\cos(\psi - \theta) + r^2\rho^2/R^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\psi - \theta) + \rho^2} \le \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2R}{r_{MP}},$$

где (r, ψ) и (ρ, θ) – полярные координаты точек M и P соответственно, $r_{MP} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\psi - \theta)}$ – расстояние между M и P. Отсюда

$$\|v\|_{L_2(\tau)}^2 = \int_\tau v^2(M) dM = \int_\tau \left(\sqrt{G(M, P)}, \sqrt{G(M, P)}\phi(P)\right)^2 dM$$

и, в силу неравенства Коши–Буняковского,

$$\|v\|_{L_2(\tau)}^2 \le \int_\tau \left[\int_\tau G(M, Q) dQ\right]\left[\int_\tau G(M, P)\phi^2(P) dP\right] dM = \int_\tau \phi^2(P) \int_\tau G(M, P) \left[\int_\tau G(M, Q) dQ\right] dM dP.$$

Принимая во внимание (8), получаем

$$\|v\|_{L_2(\tau)}^2 \le \left[\max_{M \in B} \int_\tau G(M, P) dP\right]^2.$$

Обозначая через l максимальную из длин сторон треугольника τ и через d – высоту, проведенную в τ к стороне длины l, и учитывая, что $(\sqrt{3}/2)\operatorname{diam}\tau \le l \le \operatorname{diam}\tau$, имеем

$$\|v\|_{L_2(\tau)} \le \max_{M \in B} \int_\tau G(M, P)dP \le \frac{1}{2\pi} \int_{-d/2}^{d/2} dx \int_{-l/2}^{l/2} dy \ln \frac{2R}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{d}{\pi} \int_0^{l/2} \ln \frac{2R}{y} dy =$$

$$= \frac{ld}{2\pi}\left(\ln\frac{4R}{l} + 1\right) \le \frac{\operatorname{mes}\tau}{\pi} \ln \frac{8\mathrm{Re}}{\sqrt{3}\operatorname{diam}\tau}.$$

Подставляя это соотношение в (11), получаем утверждение теоремы с постоянными $c_1 = c_3c_4/\sqrt{\pi}$ и $c_2 = 8\mathrm{Re}/\sqrt{3}$, причем $\operatorname{diam}\tau \le \operatorname{diam}\Omega < c_2 < (8e/\sqrt{3})\operatorname{diam}\Omega$.

Замечание 2. Если сужение функции $\chi \in W_2^1(\Omega)$ на треугольник $\tau \subset \overline{\Omega}$ есть полином степени, не превосходящей r, то утверждения леммы и теоремы 2 сохраняют силу с постоянными $c_3 = c_3(r)$, $c = c(\Omega, r)$, при этом для доказательства леммы можно воспользоваться "обратными" неравенствами из [9, с. 142].

Автор благодарит В.Б. Андреева за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
2. *Дьяконов Е.Г.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Изд-во МГУ, 1971. Вып. 1.
3. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979.
4. *Thomeé V.* Galerkin finite element methods for parabolic problems // Lect. Notes Math. 1984. V. 1054.
5. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
7. *Heinrich B.* Finite difference methods on irregular networks. Berlin: Akad.-Verl., 1987.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
9. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.