ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 36, 1996 № 8

УДК 519.632

© 1996 г. В.Б. АНДРЕЕВ, Н.В. КОПТЕВА

(*Москва*)

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЦЕНТРАЛЬНЫМ РАЗНОСТНЫМ ОТНОШЕНИЕМ[1)]

Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего малый параметр в виде множителя при старшей производной, исследуется классическая разностная схема, использующая для аппроксимации первой производной центральное разностное отношение. Путем детального анализа функции Грина сеточной задачи установлено, что на кусочно-равномерной сетке Г.И. Шишкина, сгущающейся в пограничном слое, исследуемая схема разрешима и имеет равномерную по малому параметру точность $O(N^{-2}\ln^2 N)$, где N – число узлов сетки.

Введение

Для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка рассмотрим простейшую двухточечную краевую задачу[2)]

(1) $$Lu \equiv -\varepsilon(p(x)u')' - r(x)u' = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1,$$

где

(2) $$p(x) \geqslant p_0 = \text{const} > 0, \quad r(x) \geqslant r_0 = \text{const} > 0,$$

а $\varepsilon \in (0,1]$ – малый параметр. Хорошо известно [1], что при $\varepsilon \to 0$ решение этой задачи сходится на полуинтервале $0 < x \leqslant 1$ к решению вырожденной задачи

$$-r(x)\, v' = f(x), \quad v(1) = g_1,$$

а при малых ε неиспользованное в вырожденной задаче граничное условие приводит к образованию в окрестности точки $x = 0$ так называемого пограничного слоя, где решение $u(x)$ исходной задачи (1) претерпевает сильные изменения.

Наличие малого параметра и порождаемого им пограничного слоя приводит к значительным трудностям при численном решении задачи (1) и ей подобных (см., например, [2], [3]). На пути преодоления этих трудностей в настоящее время

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01421-а)

[2)] После того как работа была сдана в печать, авторами было установлено, что ее результаты остаются в силе и для более общего, чем (1), уравнения $Lu + qu = f(x)$ с $q(x) \geqslant 0$.

сформировалось по крайней мере два направления: разработка так называемых подгоночных схем [2], [4], обладающих равномерной по малому параметру сходимостью на произвольных сетках, и использование специальных неравномерных сеток, сгущающихся в пограничном слое, для обычных разностных схем [5], [6].

Пусть $\overline{\omega} = \{x_i | 0 = x_0 < \ldots < x_N = 1\}$ – произвольная неравномерная сетка на [0,1]. Обозначим, как обычно,

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \hbar_i = (h_i + h_{i+1})/2, \quad v_{\bar{x}i} = (v_i - v_{i-1})/h_i,$$

$$v_{xi} = v_{\bar{x},i+1}, \quad v_{\hat{x}i} = (v_i - v_{i-1})/\hbar_i, \quad v_{\hat{\hat{x}}i} = (v_{i+1} - v_i)/\hbar_i$$

и построим на сетке $\overline{\omega}$ классическую аппроксимацию задачи (1)

$$-\varepsilon(p^h u^h_{\bar{x}})_{\hat{x}i} - r_i^h(\sigma u^h_{\hat{x}} + (1-\sigma)u^h_{\check{x}})_i = f_i^h, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{3}$$

$$u_0^h = g_0, \quad u_N^h = g_1,$$

где $\sigma =$ const – параметр схемы, а

$$p_i^h = p(x_i - h_i/2), \quad r_i^h = r(x_i), \quad f_i^h = f(x_i). \tag{4}$$

Известно (см., например, [7]), что если сетка $\overline{\omega}$ является равномерной, т.е. все $h_i = h = 1/N$, то на гладких решениях уравнения (1) разностная схема (3) при $\sigma = 1/2$ имеет погрешность аппроксимации $O(h^2)$, в то время как при $\sigma = 1$ ее погрешность есть лишь $O(h)$. Однако при $\sigma = 1$ на произвольной сетке при малых ε схема (3) монотонна, т.е. обладает принципом максимума [7], а при $\sigma = 1/2$ принцип максимума для (3) имеет место лишь при условии, что параметр ε не слишком мал по сравнению с h_i. Отсутствие принципа максимума у схемы (3) при $\sigma = 1/2$ приводит к тому, что ее решение приобретает «пилообразный» вид. В силу этого обстоятельства указанная схема в среде вычислителей-прикладников пользуется дурной славой. Следует, однако, отметить, что если при малых ε сетка $\overline{\omega}$ не приспособлена специальным образом к решению задачи (1), то схема (3) не обладает равномерной по ε сходимостью ни при $\sigma = 1/2$, ни при $\sigma = 1$. И тем не менее некоторым доводом в пользу схемы (3) с $\sigma = 1$ может служить установленный в [8] факт, что вне погранслоя на равномерной сетке $\overline{\omega}$ она сходится со скоростью $O(h)$. При $\sigma = 1/2$ схема (3) этим свойством не обладает, в чем можно убедиться на простых примерах.

Равномерная по ε сходимость схемы (3) на всей сетке впервые была исследована Шишкиным (см., например, [6]). Им была введена кусочно-равномерная сетка

$$\Omega = \{x_i | x_i = ih, \ i = 1, 2, \ldots, n; \ x_i = x_n + (i-n)H, \ i = n+1, \ldots, N-1; \ h = \delta/n, \tag{5}$$

$$H = (1-\delta)/(N-n), \ \delta = \min(C\varepsilon \ln N, A), \ N/n = B = O(1), \ 0 < A < 1\},$$

сгущающаяся в пограничном слое, и доказано, что схема (3) при $\sigma = 1$ на сетке (5) при $C > p(0)/r(0)$ равномерно по ε сходится в смысле сеточной нормы $C(\Omega)$ со скоростью $O(N^{-1}\ln^2 N)$. В [3] была простроена модификация монотонной схемы А.А. Самарского [7] и на сетке (5) при $C > 2p(0)/r(0)$ доказана ее равномерная по ε сходимость со скоростью $O(N^{-2}\ln^2 N)$ в той же норме.

Ниже будет исследована на той же сетке (5) схема (3) при $\sigma = 1/2$. Перепишем ее в виде

$$(L^h u^h)_i \equiv -\varepsilon(p^h u^h_{\bar{x}})_{\hat{x}i} - r_i^h u^h_{\overset{\circ}{x}i} = f_i^h, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{6}$$

$$u_0^h = g_0, \quad u_N^h = g_1,$$

где $\upsilon_{\overset{\circ}{x}i} = (\upsilon_{i+1} - \upsilon_{i-1}) / (2\hbar_i)$ – центральное разностное отношение. Имеет место

Т е о р е м а 1. *Пусть* $u(x)$ – *решение задачи* (1), (2) *с достаточно гладкими коэффициентами и правой частью, а* u^h – *решение* (6), (4) *на сетке Шишкина* (5). *Тогда если параметр* C *сетки* Ω *удовлетворяет условию*

(7) $$C > 2p(0) / r(0),$$

а $N \geqslant N_0(p(x), r(x))$, *то*

$$\max_i |u(x_i) - u^h(x_i)| = O(N^{-2} \ln^2 N)$$

равномерно по ε.

Доказательству этой теоремы и посвящена настоящая работа.

§ 1. Сеточная функция Грина

Ключом к доказательству теоремы 1 является доказательство равномерной по ε ограниченности функции Грина $G(x_i, \xi_j)$ задачи (6). Как функция x_i при фиксированном ξ_j, функция Грина определяется соотношениями

(1.1) $$L^h G(x_i, \xi_j) = \delta^h(x_i, \xi_j), \quad x_i \in \Omega, \quad \xi_j \in \Omega,$$

(1.2) $$G(0, \xi_j) = G(1, \xi_j) = 0, \quad \xi_j \in \Omega,$$

где

$$\delta^h(x_i, \xi_j) = \begin{cases} \hbar_i^{-1} & \text{при } x_i = \xi_j, \\ 0 & \text{при } x_i \neq \xi_j \end{cases}$$

есть сеточный аналог дельта-функции Дирака.

Пусть

(1.3) $$(u, \upsilon) = \sum_{j=1}^{N-1} u_j \upsilon_j \hbar_j$$

есть скалярное произведение, определенное для функций $u(x_j)$ и $\upsilon(x_j)$, заданных на $\overline{\omega}$ и обращающихся в нуль при $j = 0$ и $j = N$. Тогда если $\upsilon^h(x_i)$ – решение задачи (6) с однородными граничными условиями $\upsilon^h(0) = \upsilon^h(1) = 0$, то

(1.4) $$\upsilon^h(x_i) = (G(x_i, \xi_j), f^h(\xi_j)).$$

Обозначим через L^{h*} сеточный оператор, сопряженный к L^h из (6) в смысле скалярного произведения (1.3), т.е.

$$(L^h u, \upsilon) = (u, L^{h*} \upsilon).$$

Легко проверить, что

(1.5) $$(L^{h*} \upsilon)_j \equiv -\varepsilon (p^h \upsilon_{\bar{\xi}})_{\hat{\xi} j} + (r^h \upsilon)_{\overset{\circ}{\xi} j}.$$

Оператор L^{h*} позволяет описать функцию $G(x_i,\xi_j)$ как функцию ξ_j при фиксированном x_i, именно:

$$L^{h*}G(x_i,\xi_j)=\delta^h(\xi_j,x_i),\quad \xi_j\in\Omega,\ x_i\in\Omega, \tag{1.6}$$
$$G(x_i,0)=G(x_i,1)=0,\quad x_i\in\Omega.$$

Построим функцию $G(x_i,\xi_j)$ в явном виде. Для этого введем в рассмотрение функцию $\alpha(x_i)=\alpha_i$, которая является решением следующей сеточной задачи Коши:

$$L^h\alpha_i=0,\quad x_i\in\Omega,\quad \alpha_0=0,\quad \left(\varepsilon p_1^h+\frac{h_1}{2}r_0^h\right)\alpha_{x,0}=1. \tag{1.7}$$

Полагая здесь

$$\varepsilon(p^h\alpha_{\bar{x}})_i=w_i,\quad i=1,2,\ldots,N, \tag{1.8}$$

и принимая во внимание (6), находим, что w_i удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$w_{i+1}-w_i+\frac{r_i^h}{2}\left(\frac{h_{i+1}}{\varepsilon p_{i+1}^h}w_{i+1}+\frac{h_i}{\varepsilon p_i^h}w_i\right)=0. \tag{1.9}$$

Отсюда

$$w_{i+1}=q_iw_i, \tag{1.10}$$

где

$$q_i=\left(1-\frac{r_i^hh_i}{2\varepsilon p_i^h}\right)\left(1+\frac{r_i^hh_{i+1}}{2\varepsilon p_{i+1}^h}\right)^{-1},\quad i=1,2,\ldots,N-1, \tag{1.11}$$

и, следовательно,

$$w_i=w_1\prod_{k=1}^{i-1}q_k,\quad i=1,2,\ldots,N.$$

Доопределим w_i и q_i при $i=0$, полагая в (1.9) и (1.11), что $i=0$ и $h_0=0$. Тогда, принимая во внимание второе начальное условие (1.7), будем иметь

$$w_i=\prod_{k=0}^{i-1}q_k,\quad i=0,1,\ldots,N. \tag{1.12}$$

Из (1.8) с учетом первого начального условия (1.7) находим

$$\alpha_i=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=1}^{i}\frac{w_l}{p_l^h}h_l,\quad i=0,1,\ldots,N. \tag{1.13}$$

Приступим к построению $G(x_i,\xi_j)$. Поскольку наряду с α_i решением уравнения (1.7) является и функция $\overline{\alpha}_i=\mathrm{const}$, то функцию Грина можно искать в виде

$$G(x_i,\xi_j)=c\times\begin{cases}\mathcal{B}_j\,\alpha_i, & i\leqslant j,\\ (\alpha_N-\alpha_i)\beta_j, & i\geqslant j.\end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (1.1) при $x_i \neq \xi_j$ и граничным условиям (1.2). Из требования однозначности представления при $i = j$ имеем $\mathcal{B}_j \alpha_j = (\alpha_N - \alpha_j)\beta_j$ и, следовательно,

$$G(x_i, \xi_j) = c \times \begin{cases} \alpha_i(\alpha_N - \alpha_j)\beta_j / \alpha_j; & i \leqslant j, \\ (\alpha_N - \alpha_i)\beta_j, & i \geqslant j. \end{cases} \tag{1.14}$$

Далее, функция $G(x_i, \xi_j)$ по переменной ξ_j удовлетворяет уравнению (1.6) и, следовательно, β_j такова, что вместе с $\overline{\beta}_j = \beta_j / \alpha_j$ удовлетворяет уравнению

$$L^{h*} v_j = 0, \quad \xi_j \in \Omega. \tag{1.15}$$

Поскольку к тому же $G(x_i, 0)$ должна обращаться в нуль, а $\beta_0 = \overline{\beta}_0 \alpha_0 = 0$, то пусть

$$L^{h*} \beta_j = 0, \quad \xi_j \in \Omega, \quad \beta_0 = 0, \quad \varepsilon p_1^h \beta_{\xi,0} - \frac{h_1}{2}(r^h \beta)_{\xi,0} = 1. \tag{1.16}$$

Найдем β_j. Из (1.15) и (1.5) следует, что

$$\varepsilon p_{j+1}^h v_{\overline{\xi},j+1} - (r_j^h v_j + r_{j+1}^h v_{j+1}) / 2 = \text{const}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{1.17}$$

Если const = 0, то

$$\left(1 - \frac{r_{j+1}^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h}\right) v_{j+1} = \left(1 + \frac{r_j^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h}\right) v_j$$

или, с учетом (1.11),

$$\left[v_{j+1}\left(1 - \frac{r_{j+1}^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h}\right)\right]^{-1} = q_j \left[v_j \left(1 - \frac{r_j^h h_j}{2\varepsilon p_j^h}\right)\right]^{-1}.$$

Сравнивая это соотношение с (1.10), заключаем, что

$$v_j = c\left[w_j\left(1 - \frac{r_j^h h_j}{2\varepsilon p_j^h}\right)\right]^{-1}, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \tag{1.18}$$

где w_j определяется (1.12). Отсюда и из (1.12) следует, что v_j, являясь решением уравнения (1.15), не может претендовать на роль β_j – решения задачи (1.16), ибо требование $v_0 = 0$ приводит к тождественно нулевому решению. Тем самым для v_j подходит роль $\overline{\beta}_j$ и, следовательно, можно положить

$$\beta_j = v_j \alpha_j. \tag{1.19}$$

Подставляя теперь (1.19) во второе начальное условие (1.16) и принимая во внимание (1.13) и (1.18), находим, что это условие будет выполнено, если в (1.18) положить $c = 1$.

Осталось определить постоянную c в (1.14). Для этого следует подставить (1.14) при найденной β_j в (1.1) и положить там $i = j$, что приведет к значению $c = \alpha_N^{-1}$. Итак, функция Грина $G(x_i, \xi_j)$ полностью определена и может быть записана в виде

$$G(x_i,\xi_j)=\left[w_j\left(1-\frac{r_j^h h_j}{2\varepsilon p_j^h}\right)\alpha_N\right]^{-1}\times\begin{cases}\alpha_i(\alpha_N-\alpha_j), & i\leqslant j,\\ (\alpha_N-\alpha_i)\alpha_j, & i\geqslant j.\end{cases}\tag{1.20}$$

З а м е ч а н и е. 1. Разумеется, к соотношению (1.19) можно было бы прийти без апелляции к функции Грина, просто решая уравнение (1.17) при const $\neq 0$. Решение этого уравнения можно найти в виде (1.18) при $c = c_j$ методом вариации постоянной.

Следует отметить, что представление функции Грина в виде (1.20) вполне корректно, только если $[1-r_j^h h_j/(2\varepsilon p_j^h)]\neq 0$ ни при каком $\xi_j\in\Omega$. В противном случае требуются дополнительные пояснения. Сделаем их.

Для $i\leqslant j$ введем в рассмотрение функции

$$W_{ij}=\frac{w_j}{w_i}=\prod_{k=1}^{j-1}q_k\tag{1.21}$$

и

$$A_{ij}=\frac{\alpha_j-\alpha_{i-1}}{w_i}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=i}^{j}\frac{W_{il}}{p_l^h}h_l,\tag{1.22}$$

где w_i и α_i задаются соотношениями (1.12) и (1.13) соответственно. Очевидно, что при $i\leqslant m<j$

$$W_{ij}=W_{im}W_{mj}=W_{im}q_mW_{m+1,j},\tag{1.23}$$

а

$$A_{ij}=A_{im}+W_{i,m+1}A_{m+1,j}.\tag{1.24}$$

Перепишем $G(x_i,\xi_j)$ из (1.20) в терминах W_{ij} и A_{ij}. Поскольку, в силу (1.11),

$$w_j\left(1-\frac{r_j^h h_j}{2\varepsilon p_j^h}\right)=w_{j+1}\left(1+\frac{r_j^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h}\right),$$

то, подставляя это соотношение в знаменатель (1.20) и принимая во внимание (1.22) и (1.21), будем иметь

$$G(x_i,\xi_j)=\left[\left(1+\frac{r_j^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h}\right)\alpha_N\right]^{-1}\times\begin{cases}\alpha_iA_{j+1,N}, & i\leqslant j,\\ \alpha_jA_{i+1,N}W_{j+1,i+1}, & i\geqslant j.\end{cases}\tag{1.25}$$

Это представление $G(x_i,\xi_j)$ корректно вне зависимости от того, обращаются в нуль какие-либо q_j или нет. В дальнейшем будут использоваться оба представления функции Грина, (1.20) и (1.25).

§ 2. Вспомогательные оценки

Прежде чем переходить к непосредственной оценке функции $G(x_i,\xi_j)$, установим некоторые вспомогательные оценки. Поскольку коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ уравнения (1) предполагаются непрерывными на $[0, 1]$, то они там ограничены. Пусть

$$p(x)\leqslant\bar{p},\quad r(x)\leqslant\bar{r}.\tag{2.1}$$

Л е м м а 1. *Если коэффициенты* $p(x)$ *и* $r(x)$ *уравнения* (1) *подчинены неравенствам* (2), (2.1), *а для числа узлов сетки* Ω *выполнено условие*

(2.2) $$N > N_1,\ \text{где}\ N_1 \geqslant \max\left\{3, \frac{\bar{r}}{2p_0} BC \ln N_1\right\},$$

то при $i = 1,2,\dots,n$ *решение задачи* (1.7) *монотонно возрастает и для него справедливы оценки*

(2.3) $$\frac{p_0}{\bar{p}\bar{r}}(1-\mathring{q}^i) \leqslant \alpha_i \leqslant \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}(1-\bar{q}^i),\quad i = 1,2,\dots,n,$$

где

(2.4) $$\mathring{q} = \left(1 - \frac{h\bar{r}}{2\varepsilon p_0}\right)\left(1 + \frac{h\bar{r}}{2\varepsilon p_0}\right)^{-1},\quad \bar{q} = \left(1 - \frac{hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)\left(1 + \frac{hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)^{-1}.$$

При этом

(2.5) $$0 < \frac{\mathring{q}^{i-1}}{1 + h\bar{r}/2(\varepsilon p_0)} \leqslant w_i \leqslant \frac{\bar{q}^{i-1}}{1 + hr_0/(2\varepsilon\bar{p})},\quad i = 1,2,\dots,n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что при сделанных предположениях

(2.6) $$\mathring{q} > 0.$$

Из (2.4) находим, что (2.6) будет выполнено, если

(2.7) $$h < 2\varepsilon p_0/\bar{r}.$$

Оценим h. По определению (5), $h = \delta/n = B\delta/N$. Если $C\varepsilon\ln N < A$, то, в силу (5), $\delta = C\varepsilon\ln N$, а $h = (BC\varepsilon\ln N)/N$. Поскольку функция $N^{-1}\ln N$ при $N \geqslant 3$ является убывающей, то, с учетом (2.2),

$$h < (BC\varepsilon\ln N_1)/N_1 \leqslant 2\varepsilon p_0/\bar{r}.$$

Если же $C\varepsilon\ln N \geqslant A$, то $\delta = A$,

$$h = AB/N \leqslant (BC\varepsilon\ln N)/N,$$

и снова с учетом (2.2) приходим к (2.7). Положительность $\mathring{q}$ установлена.

Оценивая q_k из (1.11) с учетом (4), (2) и (2.1) и принимая во внимание (2.4) и (2.6), будем иметь

(2.8) $$0 < \mathring{q} \leqslant q_i \leqslant \bar{q} < 1,\quad i = 1,2,\dots,n-1.$$

Использование этих неравенств при оценке (1.12) приводит к (2.5). В силу (1.8), монотонное возрастание $\alpha(x_i)$ есть следствие уже доказанной положительности w_i. Наконец, оценки (2.3) следуют из (1.13) и (2.5). Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть коэффициенты* $p(x)$ *и* $r(x)$ *уравнения* (1) *суть непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям* (2), (2.1) *и*

(2.9) $$|p'(x)| \leqslant c_1,\quad |r'(x)| \leqslant c_1.$$

Если к тому же число узлов сетки Ω достаточно велико, т.е.

(2.10) $N \geqslant N_2 = N_2(p, r)$

(см. (2.26), (2.23)), *то при* $j \geqslant i \geqslant n+1$

(2.11) $|W_{ij}| \leqslant \bar{p} / p_0,$

(2.12) $|A_{ij}| \leqslant \dfrac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \dfrac{H r_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right) c_2,$

где $1 \leqslant c_2 = c_2(p; r)$ (см. (2.29)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Когда k пробегает значения от $i \geqslant n+1$ до $j-1$, поведение функции q_k из (1.11) определяется одним из следующих сценариев: 1) q_k остается положительной при всех k; 2) q_k остается отрицательной при всех k; 3) q_k меняет знак или обращается в нуль. Рассмотрим эти сценарии по отдельности.

1. Пусть $q_k > 0$ при $i \leqslant k \leqslant j-1$. Поскольку $i \geqslant n+1$, то

(2.13) $$0 < q_k = \left(1 - \frac{H r_k^h}{2\varepsilon p_k^h}\right)\left(1 + \frac{H r_k^h}{2\varepsilon p_{k+1}^h}\right)^{-1} \leqslant \left(1 - \frac{H r_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)\left(1 + \frac{H r_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)^{-1} \equiv Q < 1$$

и, следовательно,

$$0 < W_{ij} \leqslant Q^{j-i} \leqslant 1,$$

что не противоречит (2.11). Далее,

(2.14) $$0 \leqslant A_{ij} < \frac{H}{\varepsilon p_0} \sum_{l=i}^{\infty} Q^{l-i} = \frac{H}{\varepsilon p_0} \frac{1}{1-Q} = \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{H r_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right),$$

что совпадает с (2.12) при $c_2 = 1$.

2. Пусть $q_k < 0$ при $i \leqslant k \leqslant j-1$. Поскольку при любых положительных a и b дробь $(-1+a)/(1+b) > -1$, то

(2.15) $$0 > q_k = \frac{p_{k+1}^h}{p_k^h}\left(-1 + \frac{2\varepsilon p_k^h}{H r_k^h}\right)\left(1 + \frac{2\varepsilon p_{k+1}^h}{H r_k^h}\right)^{-1} \geqslant -\frac{p_{k+1}^h}{p_k^h}$$

и, следовательно,

$$|W_{ij}| \leqslant p_j^h / p_i^h \leqslant \bar{p} / p_0,$$

что совпадает с (2.11). Далее, с учетом (1.21), (1.22) находим, что

(2.16) $$A_{ij} = \frac{H}{\varepsilon}\left[\frac{1}{p_i^h} + \frac{q_i}{p_{i+1}^h} + \ldots + \frac{1}{p_j^h}\prod_{k=1}^{j-1} q_k\right] =$$

$$= \frac{H}{\varepsilon}\left[\frac{1}{p_{i+1}^h}\left(\frac{p_{i+1}^h}{p_i^h} + q_i\right) + \frac{q_i q_{i+1}}{p_{i+3}^h}\left(\frac{p_{i+3}^h}{p_{i+2}^h} + q_{i+2}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{p_j^h}\prod_{k=i}^{j-2} q_k\left(\frac{1-(-1)^{j-i}}{2}\frac{p_j^h}{p_{j-1}^h} + q_{j-1}\right)\right].$$

Если $(j-i)$ – нечетное число, то, в силу (2.15), выражения в каждой круглой скобке этой суммы положительны. Положительны и множители при них, и, следовательно,

(2.17) $\qquad A_{ij} > 0.$

Если же $(j-i)$ – четное число, то изменяется лишь последнее слагаемое, в котором величина, стоящая в круглой скобке, будет отрицательной. Но отрицательным будет и множитель при ней, и снова верно (2.17).

Перенесем первое слагаемое в представлении A_{ij} в виде (2.16) в левую часть, а оставшиеся слагаемые снова сгруппируем парами:

$$A_{ij}-\frac{H}{\varepsilon}\frac{1}{p_i^h}=\frac{H}{\varepsilon}\left[\frac{q_i}{p_{i+2}^h}\left(\frac{p_{i+2}^h}{p_{i+1}^h}+q_{i+1}\right)+\ldots\right].$$

Те же рассуждения приводят к заключению, что

$$A_{ij}-\frac{H}{\varepsilon}\frac{1}{p_i^h}<0.$$

Объединяя это неравенство с (2.17), получаем

(2.18) $$|A_{ij}|<\frac{H}{\varepsilon}\frac{1}{p_i^h}\le\frac{H}{\varepsilon}\frac{1}{p_0},$$

что не противоречит (2.12) при $c_2=2$.

3. Пусть q_k меняет знак. Пусть натуральное число m, расположенное между i и $j-1$, таково, что все $q_{m+1},\ldots,q_{j-1}$ одного знака, а q_m – другого или нуль. Тогда для q_k при $m+1\le k\le j-1$ имеет место один из уже рассмотренных сценариев 1) или 2), при реализации которых утверждения леммы доказаны. Поэтому, в силу (2.11),

$$|W_{m+1,j}|=|q_{m+1}\cdots q_{j-1}|\le\bar{p}/p_0.$$

Отсюда с учетом (1.23) получаем

(2.19) $$|W_{ij}|=|W_{im}q_mW_{m+1,j}|\le|W_{im}|\frac{\bar{p}}{p_0}|q_m|.$$

Если $q_m=0$, то $W_{ij}=0$ и оценка (2.11) очевидна. Поэтому пусть $q_m\ne0$ и $q_mq_{m+1}<0$. Введем в рассмотрение функцию

(2.20) $$q(x)=\left[1-\frac{Hr(x)}{2\varepsilon p(x-H/2)}\right]\left[1+\frac{Hr(x)}{2\varepsilon p(x+H/2)}\right]^{-1}.$$

Принимая во внимание (4) и (1.11), заключаем, что $q_m=q(x_m)$, равно как и $q_{m+1}=$ $=q(x_{m+1})$. Поскольку, по предположению, q_m и q_{m+1} имеют разные знаки, то функция $q(x)$, будучи непрерывной, обращается в нуль в точке $\xi\in(x_m,x_{m+1})$. Отсюда находим, что

(2.21) $$\frac{H}{\varepsilon}=2\frac{p(\xi-H/2)}{r(\xi)}\le\frac{2\bar{p}}{r_0}$$

и

(2.22) $$q_m=q(\xi)+(x_m-\xi)q'(\eta)=(x_m-\xi)q'(\eta),\qquad \eta\in(x_m,\xi).$$

Оценим $q'(x)$. Из (2.20) следует, что

$$q'(x) = -\frac{H}{2\varepsilon}\left[1+\frac{Hr(x)}{2\varepsilon p(x+H/2)}\right]^{-1}\left[\left(\frac{r(x)}{p(x-H/2)}\right)' + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r(x)}{p(x+H/2)}\right)' q(x)\right].$$

Для первых двух сомножителей имеем

$$\frac{H}{2\varepsilon}\left[1+\frac{Hr(x)}{2\varepsilon p(x+H/2)}\right]^{-1} \le \frac{\overline{p}}{r_0}.$$

Далее, поскольку с учетом (2), (2.1) и (2.9) получено

$$\left|\left[\frac{r(x)}{p(x\pm H/2)}\right]'\right| \le \frac{c_1(\overline{p}+\overline{r})}{p_0^2},$$

а в силу (2.13) и (2.15) имеем $|q(x)| \le \overline{p}/p_0$, то

$$|q'(x)| \le \frac{\overline{p}}{r_0}\left[\frac{c_1(\overline{p}+\overline{r})}{p_0^2}\left(1+\frac{\overline{p}}{p_0}\right)\right] \equiv c_3 \tag{2.23}$$

и для q_m из (2.22) имеем оценку

$$|q_m| \le c_3 H. \tag{2.24}$$

Подставляя эту оценку в (2.19) и замечая, что, в силу (5),

$$H = \frac{1-\delta}{N-n} \le \frac{1}{(1-1/B)N},$$

будем иметь

$$|W_{ij}| \le |W_{im}| \frac{\overline{p}}{p_0}\frac{c_3}{(1-1/B)N}. \tag{2.25}$$

Пусть число N_2, фигурирующее в утверждениях леммы, удовлетворяет неравенству

$$N_2 \ge \frac{\overline{p}c_3}{p_0(1-1/B)}. \tag{2.26}$$

Тогда из (2.25) с учетом (2.10) находим, что

$$|W_{ij}| \le |W_{im}|. \tag{2.27}$$

Этим завершается первый этап оценки $|W_{ij}|$. На втором этапе, выделяя следующую смену знака q_k и повторяя проведенные рассуждения, получаем оценку

$$|W_{im}| \le |W_{im_1}|, \tag{2.28}$$

где число $m_1 < m-1$ таково, что $q_{m_1+1}, \ldots, q_{m-1}$ одного знака, а q_{m_1} – другого или нуль. Отсюда и из (2.27) имеем

$$|W_{ij}| \le |W_{im_1}|.$$

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока у оставшихся q_k, образующих W_{im_l} из правой части оценки типа (2.28), не останется смен знака. После этого для указанных q_k реализуется один из уже рассмотренных сценариев 1) или 2), что и завершает доказательство (2.11).

Обратимся к оценке A_{ij}. С учетом (1.24) и (1.23),

$$A_{ij} = A_{im} + W_{i,m+1}A_{m+1,j} = A_{im} + W_{im}q_m A_{m+1,j}.$$

В силу выбора m и с учетом (2.14) и (2.18), для $A_{m+1,j}$ справедлива оценка (2.12) с $c_2 = 2$. Для W_{im} справедлива оценка (2.11), а для q_m – оценка (2.24). Поэтому

$$|A_{ij}| \le |A_{im}| + \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)2\frac{\bar{p}c_3}{p_0}H.$$

Аналогично устанавливается оценка

$$|A_{im}| \le |A_{im_1}| + \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)2\frac{\bar{p}c_3}{p_0}H,$$

подставляя которую в предшествующую оценку, получаем

$$|A_{ij}| \le |A_{im_1}| + \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)4\frac{\bar{p}c_3}{p_0}H,$$

и так далее, до тех пор, пока не придем к оценке

$$|A_{ij}| \le |A_{im_l}| + \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)2\frac{\bar{p}c_3}{p_0}(l+1)H.$$

Поскольку общее число этапов $l + 1$ не превосходит $N - n$, а для $|A_{im_l}|$ в силу (2.14) и (2.18) справедлива оценка (2.12) с $c_2 = 2$, то отсюда находим, что

$$(2.29)\qquad |A_{ij}| \le \frac{\bar{p}}{p_0 c_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)2\left(1 + \frac{\bar{p}c_3}{p_0}\right) \equiv \frac{\bar{p}}{p_0 c_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon p_0}\right)c_2.$$

Оценка (2.12) установлена в общем случае, что и завершает доказательство леммы.

Л е м м а 3. *Если выполнены условия лемм 1 и 2 и, кроме того,* $N \ge \max\{N_3, N_4\}$, *где*

$$(2.30)\qquad N_3 \ge \left(\frac{4\bar{p}^2\bar{r}c_2}{p_0^2 r_0}\right)^{\bar{p}/(Cr_0)}, \qquad N_4 \ge \frac{\bar{r}c}{2p_0 A(1-1/B)}\ln N_4,$$

то

$$(2.31)\qquad \max_{i\ge n}|\alpha_i - \alpha_n| \le \frac{\bar{p}c_2}{p_0 r_0}w_n,$$

а

$$(2.32)\qquad \alpha_N \ge c_4 = \frac{p_0}{2\bar{p}\bar{r}}\left[1 - \exp\left(-\frac{A\bar{r}}{p_0}\right)\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем (2.31). Принимая во внимание (1.22) и (1.12), находим, что

(2.33) $$\alpha_i - \alpha_n = A_{n+1,i} w_{n+1} = A_{n+1,i} w_n q_n.$$

Последний сомножитель правой части (2.33) в силу (1.11) и (5) имеет вид

$$q_n = \left(1 - \frac{hr_n^h}{2\varepsilon p_n^h}\right)\left(1 + \frac{Hr_n^h}{2\varepsilon p_{n+1}^h}\right)^{-1}.$$

Условие (2.2) из леммы 1 обеспечивает справедливость неравенства (2.7), которое, в свою очередь, приводит к положительности первого сомножителя в q_n. Поэтому, принимая во внимание (2), (2.1) и (2.4), имеем

$$|q_n| = q_n \le \left(1 - \frac{hr_0}{2\varepsilon\overline{p}}\right)\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\overline{p}}\right)^{-1}.$$

Подставляя эту оценку и оценку (2.12) в (2.33), получаем

(2.34) $$|\alpha_i - \alpha_n| \le \frac{\overline{p}c_2}{p_0 r_0} w_n \left(1 - \frac{hr_0}{2\varepsilon\overline{p}}\right),$$

откуда и следует оценка (2.31).

Отметим, что, в силу (2.5) и (2.4), из (2.34) вытекает и следующая оценка:

(2.35) $$|\alpha_i - \alpha_n| \le \frac{\overline{p}c_2}{p_0 r_0} \overline{q}^n.$$

Обратимся к доказательству (2.32). Имеем

$$\alpha_N = \alpha_n + (\alpha_N - \alpha_n) \ge \alpha_n - |\alpha_N - \alpha_n|.$$

Используя (2.3), (2.35) и (2.8), находим, что

(2.36) $$\alpha_N \ge \frac{p_0}{\overline{p}\overline{r}}(1 - \mathring{q}_n) - \frac{\overline{p}c_2}{p_0 r_0}\overline{q}^n \ge \frac{p_0}{\overline{p}\overline{r}} - \frac{2\overline{p}c_2}{p_0 r_0}\overline{q}^n.$$

Поскольку

$$\ln\frac{1+t}{1-t} \ge 2t \quad \text{при} \quad 0 \le t < 1,$$

то, с учетом (2.4) и (5),

$$\overline{q}^n = \exp\left(-n\ln\frac{1}{\overline{q}}\right) \le \exp\left(-n\frac{hr_0}{\varepsilon\overline{p}}\right) = \exp\left(-\frac{\delta r_0}{\varepsilon\overline{p}}\right).$$

Пусть сетка (5) такова, что

(2.37) $$C\varepsilon \ln N < A.$$

Тогда $\delta = C\varepsilon \ln N$, и, принимая во внимание (2.2) и (2.30), находим, что

$$\overline{q}^n \le \exp\left\{-\frac{Cr_0 \ln N}{\overline{p}}\right\} = N^{-Cr_0/\overline{p}} \le N_3^{-Cr_0/\overline{p}} = \frac{p_0^2 r_0}{4\overline{p}^2\overline{r}c_2}.$$

Отсюда из (2.36) следует справедливость оценки (2.32) при выполнении (2.37).

Если же вместо (2.37) будет $C\varepsilon \ln N \geq A$, то все много проще и оценку α_N нужно проводить по-другому. Поскольку в этом случае $\varepsilon \geq A/(C \ln N)$, то, с учетом (2.30),

$$\frac{Hr_i^h}{2\varepsilon p_i^h} \leq \frac{H\bar{r}}{2\varepsilon p_0} < \frac{\bar{r}C \ln N}{2A(1-1/B)p_0 N} \leq \frac{C\bar{r}\ln N_4}{2A(1-1/B)p_0 N_4} \leq 1$$

и, следовательно, q_k из (1.11) положительна не только при $k = 1, 2, \ldots, n$, что следует из (2.2) и (2.7), но и при $k = n+1, \ldots, N-1$. Отсюда из (1.12) вытекает положительность w_i, а из (1.13) – монотонное возрастание α_i при всех $i = 1, 2, \ldots, N$. Тем самым, в частности, $\alpha_N \geq \alpha_n$, что вместе с (2.3) приводит к оценке

$$\alpha_N \geq \frac{p_0}{\bar{p}\bar{r}}(1-\mathring{q}^n). \tag{2.38}$$

Далее, как и выше, с учетом того, что $hn = A$, имеем

$$\mathring{q}^n \leq \exp\left(-\frac{nh\bar{r}}{\varepsilon p_0}\right) = \exp\left(-\frac{A\bar{r}}{\varepsilon p_0}\right) \leq \exp\left(-\frac{A\bar{r}}{p_0}\right),$$

ибо $\varepsilon \leqslant 1$. Эта оценка вместе с (2.38) и приводит к (2.32). Лемма доказана.

§ 3. Оценка функции Грина и сходимость

Мы имеем все необходимое, чтобы установить равномерную по ε оценку функции Грина.

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия лемм* 1–3, *то*

$$|G(x_i, \xi_j)| \leq c_5, \tag{3.1}$$

где $c_5 = c_5(p, r)$ (см. (3.3)) *и не зависит ни от* N, *ни от* ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценку $G(x_i, \xi_j)$ проводим сначала для $j \geq n$, а затем для $j < n$.

а. Пусть $j \geq n$. Из (1.25) с учетом лемм 2 и 3 находим, что

$$|G(x_i, \xi_j)| \leq \frac{\bar{p}c_2}{p_0 r_0 c_4}\begin{cases} |\alpha_i|, & i \leq j, \quad j \geq n, \\ \dfrac{\bar{p}}{p_0}|\alpha_j|, & i \geq j \geq n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Если $i \leq n$, то, в силу леммы 1, $\alpha_i \leq \alpha_n$, а если $i > n$, то

$$|\alpha_i| = |\alpha_n + (\alpha_i - \alpha_n)| \leq \alpha_n + |\alpha_i - \alpha_n|,$$

так что в любом случае

$$|\alpha_i| \leq \alpha_n + |\alpha_i - \alpha_n|.$$

Отсюда и из (2.3), (2.35) следует, что

$$|\alpha_i| \leq \bar{p}c_2/(p_0 r_0).$$

Точно так же оценивается и $|\alpha_j|$. Эти оценки вместе с (3.2) приводят к оценке

$$|G(x_i, \xi_j)| \leq c_5 \equiv \frac{\bar{p}^3 c_2^2}{p_0^3 r_0^2 c_4}, \qquad j \geq n. \tag{3.3}$$

б. Оценим $G(x_i, \xi_j)$ при $j < n$. Будем теперь пользоваться представлениями (1.20). Начнем с оценки $(\alpha_N - \alpha_j)$. Имеем

$$\alpha_N - \alpha_j = (\alpha_N - \alpha_n) + (\alpha_n - \alpha_j).$$

Первое слагаемое правой части оценивается при помощи (2.31), а второе слагаемое в силу (1.22) имеет вид

$$\alpha_n - \alpha_j = w_{j+1} A_{j+1,n}.$$

Поскольку $j < n$, то, в силу леммы 1, $q_j > 0$ и для $A_{j+1,n}$ справедлива оценка вида (2.14) с заменой H на h. Принимая все это во внимание, будем иметь

$$|\alpha_N - \alpha_j| \le \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left[c_2 w_n + \left(1 + \frac{h r_0}{2\varepsilon \bar{p}}\right) w_{j+1}\right]. \tag{3.4}$$

Далее, в силу леммы 1, функция w_j при $j < n$ является убывающей и поэтому $w_n \leqslant w_{j+1}$. Подставляя эту оценку в (3.4) и несколько загрубляя, окончательно получаем

$$|\alpha_N - \alpha_j| \le \frac{2\bar{p} c_2}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{h r_0}{2\varepsilon \bar{p}}\right) w_{j+1}. \tag{3.5}$$

Докажем, что точно такая же оценка имеет место и для интересующих нас значений $(\alpha_N - \alpha_i)$. В самом деле, если $i < n$, то в (3.5) нужно только заменить j на i. Но поскольку $(\alpha_N - \alpha_i)$ фигурирует в (1.20) лишь при $i \ge j$, а w_i – убывающая функция, то во вновь полученной оценке $|\alpha_N - \alpha_i|$ вместо w_{i+1} можно поставить w_{j+1}.

Если же $i > n$, то $(\alpha_N - \alpha_i) = (\alpha_N - \alpha_n) + (\alpha_n - \alpha_i)$ и неравенство (2.31) применимо к обоим слагамым, в силу чего $|\alpha_N - \alpha_i| \le [2\bar{p} c_2 / (p_0 r_0)] w_n$. Оценка правой части этого неравенства через правую часть (3.4) вытекает из рассуждений, аналогичных приведенным выше.

Оценим, наконец, α_i и α_j. Поскольку α_i фигурирует в (1.20) лишь при $i \le j$, а функция α_i в силу леммы 1 при $i \le n$ является возрастающей, то, с учетом (2.3),

$$\alpha_i \leqslant \alpha_j \leqslant \alpha_n \le \bar{p} / (p_0 r_0). \tag{3.6}$$

Итак, все предварительные оценки получены. Подставим теперь (3.6), (3.3) и аналог (3.5) для $(\alpha_N - \alpha_i)$ в (1.20). Если после этого учтем, что

$$\left(1 + \frac{r_j^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h}\right) \ge \left(1 + \frac{h r_0}{2\varepsilon \bar{p}}\right),$$

а для α_N справедливы оценки (2.32), то придем к оценке

$$|G(x_i, \xi_j)| \le \frac{2\bar{p}^2 c_2}{p_0^2 r_0^2 c_4}, \qquad j < n,$$

которая, как легко видеть (см.,например, определение c_2 в (2.29)), не хуже (3.3). Теорема доказана.

Мы имеем все необходимое для доказательства теоремы 1. Пусть

$$z_i = u_i^h - u_i,$$

где u_i и u_i^h – значения точного и приближенного решений задачи (1) в узлах сетки. Тогда, как обычно,

$$L^h z_i = \psi_i, \qquad x_i \in \Omega, \quad z_0 - z_N = 0,$$

где $\psi_i = f_i^h - L^h u_i = \varepsilon[(p^h u_{\bar{x}})_{\hat{x}} - (pu')']_i + r_i[u_{\overset{\circ}{x}} - u']_i$ – погрешность аппроксимации задачи (6).

В силу (1.4),

$$z(x_i) = (G(x_i, \xi_j), \psi(\xi_j)).$$

Отсюда с учетом теоремы 2 приходим к оценке

$$\|z\|_{L^h_\infty(\Omega)} = \max_{x_i \in \Omega} |z_i| \le c_5 \sum_{x_i \in \Omega} |\psi_i| \hbar_i = c_5 \|\psi\|_{L^h_1(\Omega)}. \tag{3.7}$$

Повторяя теперь в упрощенном виде рассуждения, использованные в [3] при доказательстве теоремы 4, убеждаемся в том, что

$$\|\psi\|_{L^h_1(\Omega)} = O(N^{-2} \ln^2 N)$$

равномерно по ε. Эта оценка вместе с (3.7) завершает доказательство теоремы 1.

Замечания. 2. Как показывает рассмотрение уравнения (1) с постоянными коэффициентами и нулевой правой частью, множитель $\ln^2 N$ в оценке точности разностной схемы (6) на сетке (5) опустить нельзя.

3. Тот же пример показывает, что условие (7) в лучшем случае может быть ослаблено без ухудшения результата лишь до $C \ge 2p(0)/r(0)$.

4. Если сетка равномерная, то $u_{\overset{\circ}{x}} = 0.5(u_x + u_{\bar{x}})$. На неравномерной сетке это не так. Как показывает рассмотрение указанного выше примера, замена $u^h_{\overset{\circ}{x}}$ в (6) на $0.5(u^h_x + u^h_{\bar{x}})$ приводит к нарушению равномерной по ε сходимости, несмотря на то что указанная замена на самом деле касается только одного уравнения при $i = n$. К тому же эффекту приводит замена $u^h_{\overset{\circ}{x},n}$ в (6) на $(hu^h_x + Hu^h_{\bar{x}})_n / (2\hbar_n)$. Как легко видеть, последнее выражение аппроксимирует $u'(x_n)$ на неравномерной сетке с погрешностью $O(H^2 + h^2)$.

5. Если вместо (2) коэффициент $r(x)$ уравнения (1) удовлетворяет условию $r(x) \le -r_0 < 0$, то утверждение теоремы 1 сохраняет силу, если сетку Ω из (5) заменить на сетку Ω', сгущающуюся, как и Ω, но на правом конце отрезка $[0, 1]$, а параметр C заменить на $C > 2p(1)/|r(1)|$.

6. Если задачу для сопряженного к (1) уравнения аппроксимировать при помощи сопряженного к L^h из (6) в смысле (1.3) оператора (1.5), то утверждение теоремы 1 сохраняется для сетки Ω', описанной в замечании 5.

§ 4. Числовые результаты

Приведем числовые результаты, иллюстрирующие точность исследованной схемы. Легко видеть, что функция

$$u(x) = \frac{e^{-x/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} + 2x \cos\frac{\pi x}{2}$$

Таблица 1

N	ε				
	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
8	0.00211 4.0	0.08554 3.2	0.09580 3.3	0.09596 3.2	0.09596 3.2
16	0.00053 4.0	0.02672 3.1	0.02946 3.2	0.02955 3.2	0.02955 3.2
32	0.00013 4.0	0.00850 3.1	0.00922 3.2	0.00929 3.2	0.00929 3.2
64	0.00003 4.0	0.00271 3.1	0.00287 3.3	0.00292 3.2	0.00292 3.2
128	0.00001 4.0	0.00086 3.2	0.00088 3.2	0.00091 3.2	0.00091 3.2
256	0.00000	0.00027	0.00027	0.00028	0.00028

Таблица 2

i	x_i	z_i	i	x_i	z_i
0	0.00000	0.00000	11	0.10053	–0.01210
1	0.00005	–0.01608	12	0.20047	–0.00562
2	0.00011	–0.02010	13	0.30041	–0.00757
3	0.00017	–0.01972	14	0.40035	–0.00161
4	0.00023	–0.01810	15	0.50029	–0.00418
5	0.00029	–0.01647	16	0.60023	0.00092
6	0.00035	–0.01516	17	0.70017	–0.00253
7	0.00041	–0.01422	18	0.80011	0.00153
8	0.00047	–0.01359	19	0.90005	–0.00295
9	0.00053	–0.01318	20	1.00000	0.00000
10	0.00059	–0.01292			

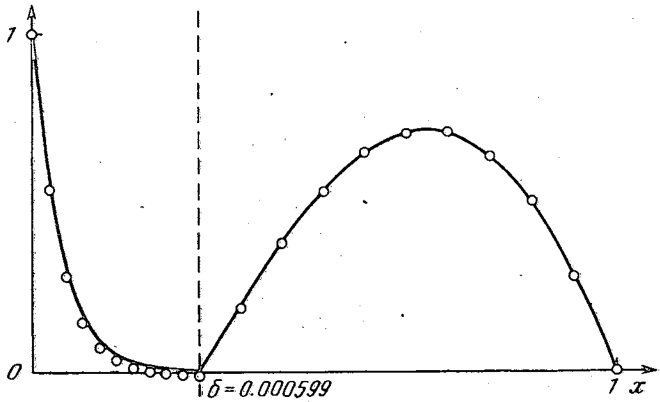
является решением задачи

$$\varepsilon u'' + u' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = 1, \quad u(1) = 0,$$

правой частью которой служит

$$f(x) = \left(\frac{\varepsilon\pi^2 x}{2} - 2\right)\cos\frac{\pi x}{2} + \pi(2\varepsilon + x)\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Эта задача решалась на сетке (5) при $B = 1/2$, т.е. при одинаковом числе узлов в "погранслое" и вне его. Параметр A был принят равным 1/2, а $C = 2$. В табл. 1 приведены значения L_∞^h-нормы погрешности решения для различных ε и N и указана скорость убывания погрешности при удвоении числа узлов (вторая цифра в каждой строке). Построчный анализ табл. 1 при каждом N свидетельствует о стабилизации погрешности при $\varepsilon \to 0$, что является отражением факта равномерной



сходимости. Анализ данных табл. 1 по столбцам указывает на то, что скорость сходимости не ниже теоретически обоснованной, ибо даже при $N = 128$ получаем $\{(N^{-1}\ln N)/[(2N)^{-1}\ln(2N)]\}^2 \approx 3.06$.

В табл. 2 приведена поточечная погрешность решения при $\varepsilon = 10^{-4}$ и $N = 20$. Видно, что на мелкой сетке в "погранслое" погрешность плавно меняется без осцилляций, в то время как вне "погранслоя" на крупной сетке наблюдаются мелкие осцилляции погрешности, отражающие немонотонность схемы. На фигуре сплошной линией изображено точное решение при $\varepsilon = 10^{-4}$, а кружочками – приближенное решение для $N = 20$. При этом масштаб в погранслое ширины $\delta = 2\varepsilon \ln N$ для наглядности увеличен.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.
3. *Андреев В.Б., Савин И.А.* О равномерной по малому параметру сходимости монотонной схемы Самарского и ее модификации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35 № 5. С. 739–752.
4. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6. Вып. 2. С. 237–248.
5. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–859.
6. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
7. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
8. *Kellog R.B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points // Math. Comput. 1978. V. 32. № 144. P. 1025–1039.

Поступила в редакцию 28.04.95